1)

נתחיל בלהראות את הטענה הבאה:

עלות פעולת join בין עצים t1 וt2 הוא  *=* t

*נזכר באלגוריתם של* join*:*

* *תבדוק האם*

*אם כן:*

*תחבר בין שני העצים (*O(1)*)*

*אחרת:*

*רד בכיוון המתאים ותחזור על* join *עם תת העץ שירדנו בכיוונו* (O(1))

* *אזן בהתאמה.*

*את פעולות האיזון נבצע בדרך למעלה ונזכר כי בשיעור ראינו שתידרש פעולת איזון על חולייה בודדת ולכן בכדי למצוא את החולייה הלא מאוזנת נזדקק ל-*t *פעולות במקרה הרע. פעולות האיזון עצמן הן בסיבוכיות קבועה ולכן סיבוכיות כל האלגוריתם הוא* t*.*

*נגדיר חולייה* n *בתור חוליית זיג-זג אם בעומק* h *אם מתקיים:*

Tree.root.left.right.left.right…(h times) = n

*נגדיר חולייה* n *בתור חוליית מינמקס בעומק* h *אם מתקיים:*

Tree.root.left.right.right.right…(h-1 times) = n

(או המקבילה הסימטרית)

*נזכר באלגוריתם* split*:*

* *נקבע את הבנים של* n *בתור* L *ו-* R
* *נעלה למעלה, אם עלינו ימינה אז* R.join(node.right) *אחרת* L.join(node.left)
* *נחזור עד שנגיע לשורש ונחזיר את* R,L

*מהתבוננות באלגוריתמים נוכל להסיק שמתקיים שהעלות של* join *בתוך* split *היא* k + 1 *כאשר* k *הוא מספר העליות בכיוון הנגדי שהופיעו ברצף לפני העלייה הרלוונטית.*

*טענה: המסלול לא משפיע על עלות ה*join *בתוך* split*.*

*הוכחה:*

Let h be a natural number and let n be a node with height h. Following the observation about the cost of join within split:

The total cost of joins within split given that n is a zig-zag node is the sum of h steps where k = 1 and the first step with k = 0 which gives:

The total cost of joins within split given that n is a min-max node is the sum of n-1 steps where k = 0 and the final node where k = n – 1 which gives:

To close the proof we will observe that all paths are combinations of zig-zags and min-max paths. Giving the wanted outcome.

*מהטענה לעיל נדע שהסיבוכיות הממוצעת תלויה רק בגובה החולייה. עבור חולייה אקראית:*

*נדע שהגובה המינימלי של עלה הוא* h/2 *ומסימטריות נסיק כי עבור חולייה מקסימלית של עץ שמאלי:*

*נתונים אלו אכן מתאימים לנתונים בטבלה. שכן, כאשר הגובה יותר גבוהה אנחנו רואים שינוי בממוצעים לעומת העצים היותר נמוכים בהם ההבדל בין הסכומים קטן יותר.*

*2)*

*נשים לב לשתי הבחנות:*

* *העומק המקסימלי של החולייה הוא* h*, גובה העץ*
* *החולייה היא חוליית מינ-מקס (לפי ההגדרה בסעיף קודם)*

*לכן מתקיים:*

*ואכן נראה שזהו אכן חסם עליון למחירי המקסימום שבטבלה.*